Calcul de développements limités

Exercice 1: Déterminer les DL à l'ordre indiqué en 0.

1. $f : x \mapsto x\mathbf{e}^{-x}$ à l'ordre 3.
2. $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}\ln(1+x)$ à l'ordre 4.
3. $h : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)$ à l'ordre 5.
4. $k : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x)}$ à l'ordre 3.

Exercice 2: Déterminer les DL au point indiqué et à l'ordre indiqué.

1. $f : x \mapsto \sin(x)$ en $\dfrac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.
2. $g : x \mapsto \cos(x)$ en $\dfrac{\pi}{3}$ à l'ordre 3.
3. $h : x \mapsto \mathbf{e}^{\sqrt{x}}$ en 1 à l'ordre 2.
4. $k : x \mapsto \ln(1+\sqrt{x})$ en 1 à l'ordre 2.

Exercice 3: Déterminer les DL à l'ordre indiqué en 0.

1. $f : x \mapsto \ln(2+\sin(x))$ à l'ordre 3.
2. $g : x \mapsto \mathbf{e}^{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3.
3. $h : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 2.
4. $k : x \mapsto (\sqrt{1+x})^x$ à l'ordre 3.

Exercice 4: Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de Arccos.

Exercice 5: Décomposer en éléments simples $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2(3-x)}$, et en déduire le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

Applications des développements limités

Exercice 6: On souhaite étudier la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}(\mathbf{e}^x)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
2. Déterminer un DL à l'ordre 3 en 0 de f.
3. Quelle est l'allure de la courbe en ce point?

Exercice 7: Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{\mathbf{e}^{\sin(x)}} \end{cases}$

1. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
2. Étudier la position de la courbe de f par rapport à cette tangente.

Exercice 8: Déterminer les limites en 0 des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \dfrac{\ln(\cos(x))}{\sin(x)}$.
2. $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{\text{ch}(x)-1}}{x}$.
3. $h : x \mapsto \dfrac{\text{sh}(x)-\sin(x)}{\ln(1+x^3)}$.
4. $k : x \mapsto (\cos(x)+\sin(x))^{\frac{1}{\tan(x)}}$.

Exercice 9: Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de la suite (u_n) définie par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathbf{e}$.

Exercice 10: [**] Déterminer un équivalent simple en 0 de

$$f : x \mapsto \sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))\,.$$

Exercice 11: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x\text{ch}(x)$.

1. Montrer que f réalise une bijection entre deux ensembles à préciser.
2. Montrer que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire un DL à l'ordre 5 en 0 de la fonction f^{-1}.

Exercice 12: Déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$u_n = \mathbf{e}^{1/n} - \frac{n(n+1)}{1+n^2}.$$

Exercice 13:
Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$ est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 14: Résoudre l'équation différentielle $(E) :\ xy' + y = e^x$.

Exercice 15:
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$.
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Développements asymptotiques

Exercice 16:

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $(E_n) : x^3 + nx = 1$ admet une unique solution réelle. On la note x_n.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ et en déduire le comportement de la suite (x_n) en $+\infty$.
3. Montrer que $x_n = \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
4. Montrer que $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^4} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.

Exercice 17: Soit $f : x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Trouver un développement asymptotique à 3 termes de f en $+\infty$.

Exercice 18: Soit $f : \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & [-\mathbf{e}^{-1},+\infty[\\ x & \longmapsto & x\mathbf{e}^x \end{array}$.
Montrer que f est bijective et que $f^{-1}(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} \ln(y)$.

Exercice 19: Soit $f : x \mapsto x - \ln(x)$ définie sur $[1;+\infty[$.
Montrer que f réalise une bijection et déterminer un développement asymptotique à trois termes en $+\infty$ de f^{-1}.

Exercice 20: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\mathrm{d}x$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{\ln(2)}{n} + \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\mathrm{d}x$.
2. En déduire que $u_n = 1 - \dfrac{\ln(2)}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 21: [**] Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$ que l'on note x_n. Donner un équivalent simple de (x_n), puis un développement asymptotique à trois termes de (x_n).